

Autovalores, estimativas *a priori*, Gershgorin e seus círculos

Carlos A. de Moura

demoura@ime.uerj.br

Instituto de Matemática e Estatística, UERJ

25-X-2004

Resumo

Depois de rapidamente recordar conceitos ligados a autovalores e autovetores, mostramos serem os métodos iterativos a única alternativa para sua determinação numérica, donde a necessidade de estabelecer **estimativas a priori**, como as de Gershgorin, que discutimos.

1 INTRODUÇÃO

Discutimos anteriormente alguns tópicos ligados ao problema mais atacado da Álgebra Linear – AL, a solução de **sistemas de equações lineares algébricas** – SELA. O segundo problema em nível de importância na AL é certamente o da determinação de **autovalores** e **autovetores** de uma matriz quadrada A , i.e.,

$$A x_\lambda = \lambda x_\lambda, \quad x \neq 0. \quad (1)$$

Havendo solução para esse problema, a matriz $A - \lambda I$ é certamente singular, onde I denota a matriz identidade. Assim, tem-se

$$\det (A - \lambda I) = 0, \quad (2)$$

sendo essa equação polinomial denominada **equação característica** associada à matriz A . Suas raízes são os autovalores de A . Denota-se por

$p_A(\lambda)$ o polinômio característico de A :

$$p_A(\lambda) := \det (A - \lambda I) .$$

Conclui-se que, sobre o corpo dos complexos, dada qualquer matriz quadrada de ordem N , ela possui N autovalores, se contarmos a multiplicidade das raízes da equação (2).

É simples verificar que, dado qualquer polinômio p de ordem N , existe uma matriz quadrada A de ordem N cujo polinômio característico é justamente p . Essa matriz é chamada **companheira** do polinômio p . Guardemos esse fato¹ por algum tempo ...

Recordemos que para resolver computacionalmente um SELA arbitrário, o método “**universal**” é o da triangulação de Gauss, que se resume em determinar uma seqüência **finita** de operações algébricas que transformam A em uma matriz **triangular inferior**:

$$A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \dots \rightarrow A_{N-1} , \quad (3)$$

onde

$$A_{N-1} = \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \dots & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \dots & \# & \# \\ 0 & 0 & \# & \dots & \# & \# \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \# \end{bmatrix} ,$$

o símbolo $\#$ denotando valores numéricos possivelmente não nulos (os da diagonal são diferentes de zero se for a matriz não singular).

Determinadas matrizes têm a propriedade de seus autovetores formarem uma base do espaço. São ditas **diagonalizáveis**. Para uma tal matriz A , pode-se determinar uma matriz de mudança de base (não -singular) U tal que

$$U^t A U = D , \quad D = \text{diagonal} . \quad (4)$$

É natural perguntar: da mesma forma que em (3), onde as transformações sucessivas podem ser obtidas pela multiplicação das matrizes por outras, convenientemente escolhidas – a partir dos próprios elementos que vão sendo obtidos para essas matrizes –, será possível passar da matriz A para a matriz D em (4), mas com um **número finito** de passos?

¹Tarefa: pesquisar esse e os demais resultados aqui mencionados sem demonstração no seu texto favorito de AL.

Para isso guardamos o resultado acima! Se a resposta fosse afirmativa, estaríamos podendo resolver **todas** as equações polinomiais com um número finito de operações algébricas. Isso sabemos ser impossível. Então:

Afirmção Para determinar numericamente os autovalores de uma matriz quadrada arbitrária temos necessariamente de recorrer a métodos iterativos.

Isto nos conduz a procurar obter informações sobre os autovalores a partir dos dados da matriz, as chamadas **estimativas a priori**.

2 Os círculos de Gershgorin

Quando é que é fácil, fácilimo, obter os autovetores de uma dada matriz? Claro, se for ela diagonal. Raciocinando com o que chamamos de *regra de ouro do cálculo numérico*, na forma, digamos assim, dual:

Se os elementos **fora da diagonal** da matriz forem “muito pequenos”, então os autovalores não devem se distanciar muito dos elementos da diagonal.

Aí a expressão “muito pequenos” deve ser entendida como **relativamente** aos autovalores, ou melhor, aos elementos da diagonal.

Primeiro teorema de Gershgorin Em (1), considerando um autovalor fixo e um autovetor correspondente, temos

$$\sum_{k=1}^N a_{ik} x_{\lambda}^k = \lambda x_{\lambda}^i, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Como pretendemos avaliar a distância de λ à diagonal de A , é natural reescrever

$$\lambda x_{\lambda}^i - a_{ii} x_{\lambda}^i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N a_{ik} x_{\lambda}^k$$

e, portanto,

$$(\lambda - a_{ii}) x_{\lambda}^i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N a_{ik} x_{\lambda}^k.$$

Se for nulo x_{λ}^i , nada concluiremos sobre $\lambda - a_{ii}$. Sendo não nulo:

$$(\lambda - a_{ii}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N a_{ik} \frac{x_{\lambda}^k}{x_{\lambda}^i}.$$

Observe que a presença da fração nos impede de dizer qualquer coisa sobre a distância que buscamos: ela envolve justamente as componentes do autovetor, também desconhecido...

Já escolhemos nossa busca entre as componentes não nulas de x_{λ} . Agora vamos seguir esta indicação nos afastando o mais possível do zero: vamos tomar a componente que tiver o maior valor absoluto. Dessa forma, $|x_{\lambda}^k|/|x_{\lambda}^i| \leq 1$ e, conseqüentemente,

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N |a_{ik}|.$$

Resumindo:

Dado um dos autovalores da matriz A , achamos uma linha dessa matriz (não sabemos qual) tal que podemos garantir: a distância entre o elemento dessa linha na diagonal e o dado autovalor não ultrapassa a soma dos demais elementos na mesma linha.

Em outras palavras:

Construímos os círculos que têm por centro os elementos da diagonal de A e, respectivamente, por raio, a soma dos demais elementos fora da diagonal, na correspondente linha. A união desses círculos contém todos os autovalores de A , que é chamado o **espectro** de A , denotado $\sigma(A)$.