Capítulo 7

Exercícios Resolvidos

por Augusto César de Castro Barbosa

Neste capítulo, apresentamos uma coletânea de exercícios resolvidos relacionados a várias aplicações. Todo o conteúdo deste capítulo foi gentilmente cedido pelo professor Augusto César de Castro Barbosa do Departamento de Análise do IME/UERJ, a quem a autora agradece.

7.1 Aplicações à Biologia

1. Numa colméia, a razão de crescimento da população é uma função da população. Assim
$$\frac{dp}{dt} = f(p).$$

a) Calcular $p(t)$ para $f(p) = \beta p$, onde β é uma constante positiva, e determinar a população limite do sistema.

$$\frac{dp}{dt} = \beta p \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}dp = \beta dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \beta \int dt \quad \Rightarrow \quad \ln p = \beta t + c$$
$$p = e^{\beta t + c} \quad \Rightarrow \quad p(t) = ke^{\beta t}, \quad \text{onde} \quad k = e^c$$
$$p(0) = p_0 \quad \Rightarrow \quad p_0 = ke^{\beta . 0} \quad \Rightarrow \quad k = p_0$$
$$p(t) = p_0 e^{\beta t}$$

No cálculo da população limite (supondo $p_0 > 0$) temos

$$p(t) = p_0 e^{\beta t} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} p(t) = +\infty$$

b) Encontrar $p(t)$ para $f(p) = \beta p - k^2 p^2$, onde β e k são constantes positivas. Calcular novamente a população limite do sistema.

$$\frac{dp}{dt} = \beta p - kp^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta p - kp^2} dp = dt$$

$$\beta p - kp^2 = -(kp^2 - \beta p) = -k\left(p^2 - \frac{\beta}{k}p\right) = -k\left(p^2 - \frac{\beta}{k}p \pm \frac{\beta^2}{4k^2}\right)$$

$$= -k\left[\left(p - \frac{\beta}{2k}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4k^2}\right]$$

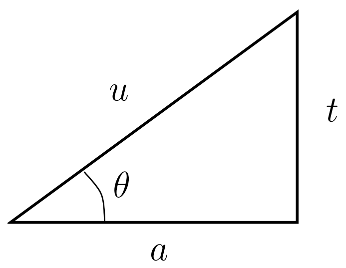
$$\int \frac{1}{\beta p - kp^2} dp = -\frac{1}{k}\int \frac{1}{\left(p - \frac{\beta}{2k}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4k^2}} dp \qquad \left(\text{Sejam} \quad u = p - \frac{\beta}{2k},\ a = \frac{\beta}{2k}\right)$$

$$\overset{\substack{u = a\sec\theta,\\ du = a\sec\theta\operatorname{tg}\theta d\theta}}{=} -\frac{1}{k}\int \frac{1}{u^2 - a^2} du = -\frac{1}{k}\int \frac{a\sec\theta\operatorname{tg}\theta}{a^2(\sec^2\theta - 1)} d\theta$$

$$= -\frac{1}{k}\int \frac{a\sec\theta\operatorname{tg}\theta}{a^2\operatorname{tg}^2\theta} d\theta = -\frac{1}{ak}\int \frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}\theta} d\theta$$

$$= -\frac{1}{ak}\int \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} d\theta = -\frac{1}{ak}\int \operatorname{cossec}\theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{ak}\ln(\operatorname{cossec}\theta - \operatorname{cotg}\theta) + c$$



$$\sec\theta = \frac{u}{a} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{a}{u}$$

$$u^2 = a^2 + t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{u^2 - a^2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cossec}\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cotg}\theta = \frac{a}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$

$$-\frac{1}{k}\int\frac{1}{u^2-a^2}du=-\frac{1}{ak}\ln\left[\frac{u-a}{\sqrt{u^2-a^2}}\right]=-\frac{1}{ak}\ln\left[\frac{u-a}{\sqrt{(u-a)(u+a)}}\right]$$
$$=-\frac{1}{ak}\ln\sqrt{\frac{u-a}{u+a}}$$

$$\int\frac{1}{\beta p-kp^2}dp=-\frac{1}{ak}\ln\sqrt{\frac{u-a}{u+a}}$$

Temos então que

$$-\frac{1}{ak}\ln\sqrt{\frac{u-a}{u+a}}=t+c_1\quad\Rightarrow\quad-\frac{1}{2ak}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)=t+c_1$$
$$\Rightarrow\quad\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)=-2akt+c_2\quad\text{onde}\quad c_2=-2akc_1$$
$$\frac{u-a}{u+a}=c_3e^{-2akt}\quad\Rightarrow\quad u(1-c_3e^{-2akt})=a(1+c_3e^{-2akt})$$
$$u=\frac{1+c_3e^{-2akt}}{1-c_3e^{-2akt}}a;\qquad u=p-\frac{\beta}{2k}\quad\text{e}\quad a=\frac{\beta}{2k}$$
$$-2akt=-2\frac{\beta}{2k}kt=-\beta t$$
$$p-\frac{\beta}{2k}=\frac{1+c_3e^{-\beta t}}{1-c_3e^{-\beta t}}\frac{\beta}{2k}\quad\Rightarrow\quad p=\frac{\beta}{2k}\left(\frac{1+c_3e^{-\beta t}+1-c_3e^{-\beta t}}{1-c_3e^{-\beta t}}\right)$$
$$p=\frac{\beta}{2k}\left(\frac{2}{1-c_3e^{-\beta t}}\right)=\frac{\beta}{k}\frac{1}{1-c_3e^{-\beta t}}$$
$$p(0)=p_0=\frac{\beta}{k}\frac{1}{1-c_3}\quad\Rightarrow\quad 1-c_3=\frac{\beta}{kp_0}\quad\Rightarrow\quad c_3=\frac{kp_0-\beta}{kp_0}$$

$$p=\frac{\beta}{k}\frac{1}{1-\dfrac{kp_0-\beta}{kp_0}e^{-\beta t}}=\frac{\beta}{k}\frac{kp_0}{kp_0+(\beta-kp_0)e^{-\beta t}}$$
$$=\frac{p_0\beta}{kp_0(1-e^{-\beta t})+\beta e^{-\beta t}}=\frac{p_0\beta e^{\beta t}}{kp_0(e^{\beta t}-1)+\beta}$$
$$=\frac{p_0e^{\beta t}}{1+\dfrac{kp_0}{\beta}(e^{\beta t}-1)}$$

Uma forma mais simples de obter $p(t)$:

$$\frac{dp}{dt} = \beta p - kp^2, \qquad f(p) = \beta p - kp^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta p - kp^2}dp = dt$$
$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{\beta p - kp^2}dp = \int dt$$

$$\frac{1}{\beta p - kp^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{\beta - kp} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\beta} \quad \text{e} \quad B = \frac{k}{\beta}$$
$$\frac{1}{\beta}\int \frac{1}{p}dp + \frac{k}{\beta}\int \frac{1}{\beta - kp}dp = \int dt$$
$$\frac{1}{\beta}\ln p + \frac{k}{\beta}\left(-\frac{1}{k}\right)\ln(\beta - kp) = t + c_1$$

$$\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{p}{\beta - kp}\right) = t + c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{p}{\beta - kp}\right) = \beta t + c_2$$
$$\frac{p}{\beta - kp} = c_3 e^{\beta t} \quad \Rightarrow \quad p = \beta c_3 e^{\beta t} - kc_3 e^{\beta t} p \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{\beta c_3 e^{\beta t}}{1 + kc_3 e^{\beta t}}$$
$$p(0) = p_0 \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{\beta c_3}{1 + kc_3} \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{p_0}{\beta - p_0 k}$$
$$p(t) = \frac{\dfrac{\beta p_0 e^{\beta t}}{\beta - p_0 k}}{1 + \dfrac{kp_0 e^{\beta t}}{\beta - p_0 k}} = \frac{\beta p_0 e^{\beta t}}{\beta - p_0 k + kp_0 e^{\beta t}} = \frac{p_0 e^{\beta t}}{1 - \frac{k}{\beta}p_0(e^{\beta t} - 1)}$$

No cálculo da população limite temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p_0 e^{\beta t}}{1 + \frac{kp_0}{\beta}(e^{\beta t} - 1)} = \lim_{t\to\infty} \frac{p_0 e^{\beta t}}{1 + \frac{kp_0}{\beta}e^{\beta t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{p_0 e^{\beta t}}{\frac{kp_0}{\beta}e^{\beta t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{p_0 \beta}{kp_0} = \frac{\beta}{k}$$

2. A população de uma cidade é de 1.000.000 de habitantes. Houve uma epidemia e 10% da população contraiu um vírus. Em sete dias esta percentagem cresceu para 20%. O vírus se propaga por contato direto entre indivíduos enfermos e sãos (logo, é proporcional ao número de contatos). A partir destes dados e supondo que o modelo seja fechado, isto é, a população se mantém constante, sem nascimentos, mortes ou migração, e os indivíduos tendo toda a liberdade de interagir, calcule:

a) A proporção de indivíduos enfermos e sãos, como uma função do tempo.

$$x = \frac{n_e}{n}, \qquad y = \frac{n_s}{n}, \qquad x + y = 1, \qquad n_e + n_s = n$$

onde

$$\begin{aligned} n &= \text{ número total de habitantes} \\ n_e &= \text{ número de indivíduos enfermos} \\ n_s &= \text{ número de indivíduos sãos} \\ x &= \text{ proporção de indivíduos enfermos} \\ y &= \text{ proporção de indivíduos sãos} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} \propto xy, \qquad \frac{dx}{dt} = kxy$$

onde k é a constante de proporcionalidade dos contatos.

$$\begin{aligned} y = 1 - x \quad &\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = kx(1-x) \\ \frac{1}{x(1-x)}dx = kdt \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x(1-x)}dx = k\int dt \\ \frac{1}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} \quad &\Rightarrow \quad 1 = A(1-x) + Bx \\ \Rightarrow \quad 1 = (B-A)x + A \quad &\Rightarrow \quad A = 1 \quad \text{e} \quad B = A = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{1-x}dx = k\int dt \\ \ln x - \ln(1-x) = kt + c \quad &\Rightarrow \quad \ln\frac{x}{1-x} = kt + c \\ \Rightarrow \quad \frac{x}{1-x} = Ae^{kt} \quad &\text{onde} \quad A = e^c \end{aligned}$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 10\% = \frac{1}{10}$$

$$\frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = Ae^{k.0} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{10}\frac{10}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{9}e^{kt}$$

$$t = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 20\% = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{9}e^{7k}$$

$$\Rightarrow \quad e^{7k} = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{7}\ln\frac{9}{4}$$

Logo,

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{9}\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right)$$

Obs.: $\dfrac{x}{1-x} = z \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{z}{z+1}$

$$x = \frac{\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right)}{\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right) + 9}$$

$$y = 1 - x = 1 - \frac{\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right)}{\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right) + 9}$$

b) O tempo necessário para que a percentagem de indivíduos enfermos seja de 50%.

$$t? \mid x = 50\% = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{9}\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right)$$

$$\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right) = 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{7}\ln\frac{9}{4} = \ln 9 \quad \Rightarrow \quad t = 7\frac{\ln 9}{\ln\frac{9}{4}} \approx 19 \text{ dias}$$

3. Em março de 1987, a população mundial atingiu 5.000.000.000, e estava crescendo à taxa de 380.000 pessoas por dia. Assumindo-se taxas de natalidade e mortalidade constantes, para quando se deve esperar uma população mundial de 10.000.000.000?

$$1987 \to P(0) = 5.10^9, \qquad \frac{dP}{dt}(0) = 3,8.10^5 d^{-1}$$

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P}dP = kdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{P}dP = k\int dt$$

$$\ln P = kt + c_1 \quad \Rightarrow \quad P(t) = ce^{kt} \quad \text{onde} \quad c = e^{c_1}$$

$$P(0) = 5.10^9 \quad \Rightarrow \quad 5.10^9 = ce^{k.0} \quad \Rightarrow \quad c = 5.10^9$$

$$P(t) = 5.10^9 e^{kt}$$

$$\frac{dP}{dt}(0) = 3,8 \times 10^5 \times 365 = 1,39.10^8 a^{-1}$$

$$\frac{dP}{dt} = kP = 5.10^9 k e^{kt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dt}(0) = 5.10^9 k$$

$$5.10^9 k = 1,39.10^8 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1,39.10^8}{5.10^9} = 2,78.10^{-2}$$

$$P(t) = 5.10^9 e^{0,028t}$$

$$t = ? \mid P(t) = 10.10^9$$

$$10^{10} = 5.10^9 e^{0,028t} \quad \Rightarrow \quad 0,028t = \ln\frac{10^{10}}{5.10^9} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{0,028}\ln 2 \approx 25 \text{ anos}$$

A população atingirá 10^{10} em 2012.

7.2 Aplicações à Física

1. A velocidade de desintegração do Rádio é diretamente proporcional à sua massa no instante considerado.

   a) Determine a lei de variação da massa de Rádio em função do tempo, sabendo que no instante $t = 0$ a massa era m_0.

$$\frac{dm}{dt} = -km \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m}dm = -kdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{m}dm = -k\int dt$$
$$\ln m = -kt + c \quad \Rightarrow \quad m = Ae^{-kt} \quad \text{onde} \quad A = e^c$$
$$m(0) = m_0 \quad \Rightarrow \quad m_0 = Ae^{-k.0} \quad \Rightarrow \quad A = m_0$$
$$m(t) = m_0 e^{-kt}$$

   b) Qual o intervalo de tempo necessário para que metade da massa inicial de Rádio se desintegre? ($k = 0,000436a^{-1}$)

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{2} = -kt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{k}\ln 2 \approx 1590 \text{ anos}$$

2. Segundo a lei de Newton, a velocidade de resfriamento de um corpo no ar é proporcional à diferença da temperatura T do corpo e a temperatura T_a do ambiente. Se a temperatura do ambiente é de 20^oC e a temperatura do corpo cai em 20 minutos de 100^oC a 60^oC, dentro de quanto tempo sua temperatura descerá para 30^oC?

$$\frac{dT}{dt} = k(T_a - T) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_a - T}dT = kdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{T_a - T}dT = k\int dt$$
$$-\ln(T_a - T) = kt + c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln(T_a - T) = -kt + c_2 \quad \Rightarrow \quad T_a - T = c_3 e^{-kt}$$
$$\Rightarrow \quad T = T_a + c_3 e^{-kt}$$

$$T(0) = 100^o\text{C} \quad \Rightarrow \quad 100 = 20 + c_3 e^{-k.0} \quad \Rightarrow \quad c_3 = 80$$
$$T(t) = 20 + 80e^{-kt}$$
$$T(20) = 60^o\text{C} \quad \Rightarrow \quad 60 = 20 + 80e^{-20k} \quad \Rightarrow \quad e^{-20k} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \quad -20k = -\ln 2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{20}\ln 2$$
$$T(t) = 20 + 80\exp\left(-\frac{t}{20}\ln 2\right)$$

$$t? \mid T(t) = 30^o\text{C}$$

$$30 = 20 + 80\exp\left(-\frac{t}{20}\ln 2\right) \quad \Rightarrow \quad 10 = 80\exp\left(-\frac{t}{20}\ln 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{8} = \exp\left(-\frac{t}{20}\ln 2\right)$$

$$-\ln 8 = -\frac{t}{20}\ln 2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{20\ln 8}{\ln 2} = \frac{20.3.\ln 2}{\ln 2} = 60 \text{ min}$$

Obs.: $\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2.$

3. Uma bola de golfe de massa $0,5kg$ recebe uma tacada que lhe imprime uma velocidade de $72km.h^{-1}$. Supondo-se que a bola permanece em contato permanente com o chão e sabendo-se que a força de atrito sobre ela é de $-5N$, qual a distância percorrida pela bola até ela parar?

$$m = 0,5kg, \qquad v = 72km.h^{-1} = 20m.s^{-1}, \qquad f_a = -5N$$

$$\frac{dp}{dt} = f_a \quad \Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = f_a \quad \Rightarrow \quad dv = \frac{f_a}{m}dt$$

$$\int dv = \frac{f_a}{m}\int dt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{f_a}{m}t + c_1$$

$$v(0) = 20 \quad \Rightarrow \quad 20 = \frac{f_a}{m}.0 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 20$$

$$v(t) = \frac{f_a}{m}t + 20 = -\frac{5}{0,5}t + 20 = -10t + 20$$

Como $\quad v = \dfrac{ds}{dt}$,

$$\frac{ds}{dt} = -10t + 20 \quad \Rightarrow \quad ds = (-10t + 20)dt$$

$$\int ds = \int(-10t + 20)dt \quad \Rightarrow \quad s = -5t^2 + 20t + c_2$$

$$s(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -5.0 + 20.0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$s(t) = -5t^2 + 20t$$

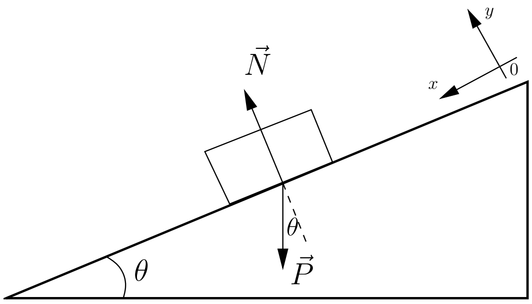
O tempo necessário para a bola parar $\rightarrow t \mid v(t) = 0$.

$$v(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -10t + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2s$$

$$s(2) = -5.2^2 + 20.2 = -20 + 40 = 20.$$

A bola percorre uma distância de $20m$ até parar.

4. Considere



Dadas as condições iniciais

$$\begin{cases} v(0) = v_0, \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

determine as expressões da velocidade e da posição em função do tempo.

$$\begin{array}{lll} \vec{P} & \rightarrow & \text{peso do corpo} \quad \text{e} \\ \vec{N} & \rightarrow & \text{reação normal da superfície do plano inclinado} \end{array}$$

Podemos decompor o movimento do corpo nas direções x e y.

1. **Direção** y.

$$P_y - N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P_y \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta \quad \text{onde} \quad P = mg$$

2. **Direção** x.

$$P_x = ma \quad \Rightarrow \quad mg\,\text{sen}\,\theta = ma \quad \Rightarrow \quad g\,\text{sen}\,\theta = \frac{dv}{dt} \quad \text{onde} \quad a = \frac{dv}{dt}$$

Obs.: $v \equiv v_x$

$$dv = g\,\text{sen}\,\theta dt \quad \Rightarrow \quad \int dv = g\,\text{sen}\,\theta \int dt \quad \Rightarrow \quad v = g\,\text{sen}\,\theta t + c$$

Como $v(0) = v_0$,

$$v_0 = g\,\text{sen}\,\theta.0 + c \quad \Rightarrow \quad c = v_0 \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + g\,\text{sen}\,\theta t$$

Temos também que

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = v_0 + g \operatorname{sen}\theta t$$
$$dx = (v_0 + g \operatorname{sen}\theta t)dt \quad \Rightarrow \quad \int dx = \int (v_0 + g \operatorname{sen}\theta t)dt$$
$$\Rightarrow \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta t^2 + k$$

Como $\quad x(0) = x_0$,

$$x_0 = v_0.0 + \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta 0^2 + k \quad \Rightarrow \quad k = x_0$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta t^2$$

5. Vamos considerar agora o plano inclinado com atrito e o corpo sujeito à resistência do ar.

$\vec{f} \quad \rightarrow \quad$ força de atrito cinético de contato $\quad$ e $\quad \vec{R} \quad \rightarrow \quad$ resistência do ar

$$\vec{R} = -\gamma\vec{v}, \qquad \vec{f} = -\mu|\vec{N}|\widehat{u}_x$$

Direção x.

$$P_x + f + R = ma \quad \Rightarrow \quad mg \operatorname{sen}\theta - \mu N - \gamma v = m\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{1}{mg \operatorname{sen}\theta - \mu N - \gamma v} dv = \frac{1}{m} dt$$

$$\overset{(N = mg\cos\theta)}{\Rightarrow} \quad \int \frac{1}{mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \gamma v} dv = \frac{1}{m} \int dt$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{\gamma} \ln\left[mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \gamma v\right] = \frac{1}{m} t + c$$
$$\ln\left[mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \gamma v\right] = -\frac{\gamma}{m} t + c_1$$
$$\Rightarrow \quad mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \gamma v = c_2 e^{-\frac{\gamma t}{m}} \quad \text{onde} \quad c_2 = e^{c_1} \quad \text{e} \quad c_1 = -\gamma c$$

$$v = \frac{1}{\gamma}\left[mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - c_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right]$$
$$v(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{1}{\gamma}\left[mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - c_2\right]$$
$$\Rightarrow \quad \gamma v_0 = mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \gamma v_0$$

Temos então que

$$v(t) = \frac{1}{\gamma}\left\{mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - [mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \gamma v_0]\, e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right\}$$
$$v(t) = \frac{1}{\gamma}mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta)\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) + v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$
$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{1}{\gamma}mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) = v_L$$

6. Um assado pesando $2,5kgf$, inicialmente a 10^oC, é posto em um forno a 280^oC às cinco horas da tarde. Depois de $75min$ a temperatura $T(t)$ do assado é de 90^oC. Quando será a temperatura do assado igual a 150^oC?

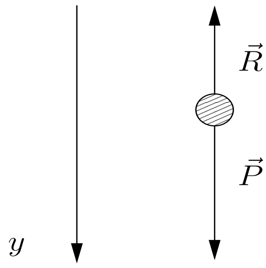
$$17{:}00 \quad \rightarrow \quad t = 0$$
$$T(0) = 10^o\text{C}, \qquad T(75) = 90^o\text{C}, \qquad T_a \quad \rightarrow \quad \text{ambiente}$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T_a - T) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = k(280 - T)$$
$$\int \frac{1}{280 - T}dT = k\int dt \quad \Rightarrow \quad -\ln(280 - T) = kt + c$$
$$\Rightarrow \quad 280 - T = Be^{-kt} \quad \text{onde} \quad B = e^{-c}$$

$$T(0) = 10 \quad \Rightarrow \quad 280 - 10 = B.1 \quad \Rightarrow \quad B = 270$$
$$T(t) = 280 - 270e^{-kt}$$
$$T(75) = 90 \quad \Rightarrow \quad 280 - 270e^{-kt} = 90 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{75}\ln\left(\frac{190}{270}\right)$$
$$k \approx 0,0047 \quad \Rightarrow \quad T(t) = 280 - 270e^{-0,0047t}$$

$$t =? \mid T(t) = 150^o\text{C}$$
$$150 = 280 - 270e^{-0,0047t} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{0,0047}\ln\left(\frac{130}{270}\right)$$
$$t \approx 155min$$
$$T = 150^o\text{C} \qquad \text{por volta de } 19{:}35h$$

7. Considerando um pára-quedista em queda livre, sem o acionamento do pára-quedas, determine a sua velocidade como uma função do tempo e sua velocidade limite. Considere $v(0) = 0$.



$$\vec{P} = m\vec{g}$$
$$\vec{R} = -\gamma\vec{v}$$

$$mg - \gamma v = ma \quad \Rightarrow \quad mg - \gamma v = m\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{1}{mg - \gamma v}dv = \frac{1}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{mg - \gamma v}dv = \frac{1}{m}\int dt$$
$$-\frac{1}{\gamma}\ln(mg - \gamma v) = \frac{t}{m} + c \quad \Rightarrow \quad \ln(mg - \gamma v) - \frac{\gamma t}{m} + k_1, \qquad k_1 = -\gamma c$$
$$mg - \gamma v = k_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}, \qquad k_2 = e^{k_1}$$
$$\gamma v = mg - k_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{\gamma}\left(mg - k_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{\gamma}\left(mg - k_2\right) \quad \Rightarrow \quad k_2 = mg$$
$$v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$
$$v_L = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - 0\right) = \frac{mg}{\gamma}$$

8. Refaça o exercício anterior considerando o pára-quedas aberto. Considere $v(0) = v_0$.

$$m = m_1 + m_2, \qquad \vec{R} = -\lambda v^2 \widehat{u}_y$$
$$m_1 \quad \rightarrow \quad \text{massa do pára-quedista}$$
$$m_2 \quad \rightarrow \quad \text{massa do pára-quedas}$$

$$P - R = ma \quad \Rightarrow \quad mg - \lambda v^2 = m\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{1}{mg - \lambda v^2}dv = \frac{1}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{mg - \lambda v^2}dv = \frac{1}{m}\int dt$$
$$\frac{1}{mg - \lambda v^2} = -\frac{1}{\lambda v^2 - mg} = \frac{A}{v\sqrt{\lambda} - \sqrt{mg}} + \frac{B}{v\sqrt{\lambda} + \sqrt{mg}}$$

$$-1 = (A+B)\sqrt{\lambda}v + (A-B)\sqrt{mg}$$

$$(A+B)\sqrt{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B$$

$$(A-B)\sqrt{mg} = -1 \quad \Rightarrow \quad -2B\sqrt{mg} = -1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2\sqrt{mg}}$$

$$\frac{1}{mg-\lambda v^2} = -\frac{1}{2\sqrt{mg}}\left[\frac{1}{v\sqrt{\lambda}-\sqrt{mg}} - \frac{1}{v\sqrt{\lambda}+\sqrt{mg}}\right]$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{mg-\lambda v^2}dv &= -\frac{1}{2\sqrt{mg}}\left\{\int \frac{1}{v\sqrt{\lambda}-\sqrt{mg}}dv - \int \frac{1}{v\sqrt{\lambda}+\sqrt{mg}}dv\right\} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{mg\lambda}}\left[\ln(v\sqrt{\lambda}-\sqrt{mg}) - \ln(v\sqrt{\lambda}+\sqrt{mg})\right] \\ &= \frac{1}{m}\int dt = \frac{t}{m} + c\end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{v\sqrt{\lambda}-\sqrt{mg}}{v\sqrt{\lambda}+\sqrt{mg}}\right) = -2\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}(t+c)$$

$$v\sqrt{\lambda}-\sqrt{mg} = (v\sqrt{\lambda}+\sqrt{mg})k\exp\left(-2t\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}\right) \quad \text{onde} \quad k = \exp\left(-2c\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}\right)$$

$$v\sqrt{\lambda}\left[1-k\exp\left(-2t\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}\right)\right] = \sqrt{mg}\left(1+k\exp\left(-2t\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}\right)\right)$$

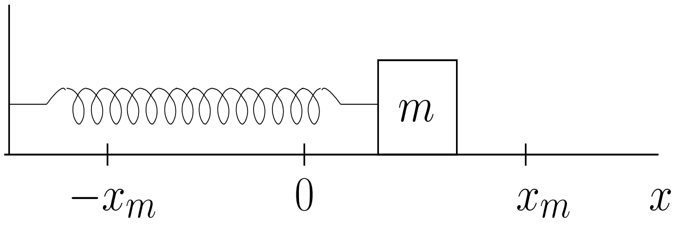
$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}\frac{1+k\exp\left(-2t\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}\right)}{1-k\exp\left(-2t\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}\right)}$$

$$v(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}\frac{1+k}{1-k} \quad \Rightarrow \quad v_0 - v_0k = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}} + k\sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$

$$k\left(\sqrt{\frac{mg}{\lambda}} + v_0\right) = v_0 - \sqrt{\frac{mg}{\lambda}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}}{v_0 + \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}}$$

$$v_L = \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$

Movimento Harmônico Simples



$$F = ma, \quad \text{onde} \quad F = -kx$$

Logo,

$$-kx = ma \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{onde} \quad \omega = \frac{k}{m} \qquad \text{obs.:} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Determine a solução de $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

Cálculo de x_h

Equação Homogênea: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

Equação Característica: $r^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \omega i \quad \text{e} \quad r_2 = -\omega i$

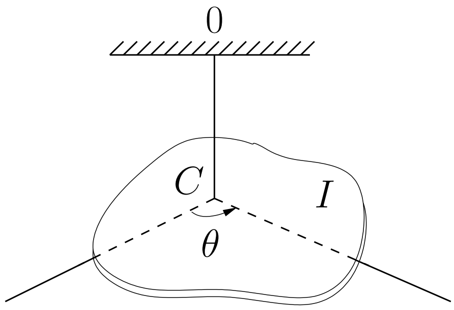
$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = c_1(\cos\omega t + i\,\text{sen}\,\omega t) + c_2(\cos\omega t - i\,\text{sen}\,\omega t) \\ &= (c_1 + c_2)\cos\omega t + i(c_1 - c_2)\,\text{sen}\,\omega t \end{aligned}$$

Fazendo

$$c_1 + c_2 = A\cos\phi \quad \text{e} \quad i(c_1 - c_2) = -A\,\text{sen}\,\phi,$$
$$x(t) = A\cos\omega t\cos\phi - A\,\text{sen}\,\omega t\,\text{sen}\,\phi \quad \Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Oscilador de Torção

O pêndulo de torção consiste em um corpo suspenso por um fio (figura que segue) de modo que a linha OC passe pelo centro de massa do corpo.



Quando o corpo sofre uma rotação de ângulo θ, a partir de sua posição de equilíbrio, o fio é torcido e passa a exercer um torque τ sobre o corpo, em torno de OC, que se opõe ao deslocamento θ com módulo proporcional a θ. Podemos então escrever que, para pequenas torções,

$$\tau = -k\theta,$$

onde k é o coeficiente de torção do fio. Chamando de I o momento de inércia do corpo em relação ao eixo OC,

$$\tau = I\alpha \quad \Rightarrow \quad -k\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

onde α é a aceleração angular e

$$\omega^2 = \frac{k}{I}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$$

A partir da equação para o período, podemos determinar experimentalmente o momento de inércia de um corpo, deixando-o suspenso por um fio cujo coeficiente é conhecido e, em seguida, medindo o período T de oscilação.

Determine a solução de

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0.$$

Solução:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Equação característica:

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \omega i \qquad \text{e} \qquad r_2 = -\omega i$$

$$\begin{aligned}\theta(t) &= c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = c_1(\cos\omega t + i\operatorname{sen}\omega t) + c_2(\cos\omega t - i\operatorname{sen}\omega t)\\ &= (c_1 + c_2)\cos\omega t + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen}\omega t\end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \theta_0\cos\phi \\ i(c_1 - c_2) = -\theta_0\operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

$$\theta(t) = \theta_0\cos\omega t\cos\phi - \theta_0\operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\phi$$

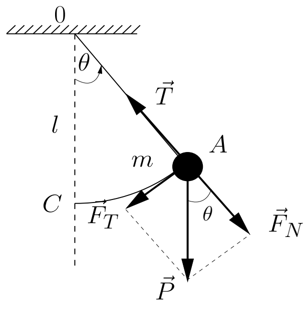
$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t + \phi)$$

ou

$$\theta(t) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t + \phi\right)$$

Pêndulo Simples

Um pêndulo simples consiste de uma partícula de massa m presa em um ponto O por um fio de comprimento l e massa desprezível.



As forças que agem no pêndulo são a tração $\vec{T}$ no fio e o peso $\vec{P}$, que está decomposto na figura em suas componentes tangencial e normal (radial).

Obs.:

Componente tangencial $\rightarrow$ força restauradora
Componente normal $\rightarrow$ força centrípeta

$$|\vec{F}_N| = |\vec{T}| = mg\cos\theta, \qquad |\vec{F}_T| = mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Da figura

$$F_T = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

onde o sinal negativo indica que a força tem sentido oposto ao deslocamento. Mas,

$$F_T = ma_T = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2(l\theta)}{dt^2} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

onde $x = l\theta$. Logo,

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0.$$

No limite em θ, θ é muito pequeno,

$$\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$$

e a equação se torna

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Vemos desta equação que, dentro da aproximação de ângulos pequenos, o movimento do pêndulo simples é harmônico simples, com

$$w^2 = \frac{g}{l} \qquad \text{e} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Obs.: Em radianos

$$\begin{aligned} &\theta = 5^o \approx 0,087267 \text{ rad} \\ &\mathrm{sen}\,\theta = 0,087156 \\ &\mathrm{tg}\,\theta = 0,087489 \\ &\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta} = 1 \end{aligned}$$

Para um ângulo θ qualquer, pode ser demonstrado que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\operatorname{sen}^4\frac{\theta_0}{2} + \dots\right)$$

Determine a solução da equação diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Equação característica:

$$r^2 + \frac{g}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}i = \omega i, \qquad r_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}}i = -\omega i$$

$$\begin{aligned}\theta(t) &= c_1 e^{\omega i t} + c_2 e^{-\omega i t} = c_1(\cos\omega t + i\operatorname{sen}\omega t) + c_2(\cos\omega t - i\operatorname{sen}\omega t) \\ &= (c_1 + c_2)\cos\omega t + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen}\omega t \\ &= \theta_0\cos\omega t\cos\phi - \theta_0\operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\phi = \theta_0\cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

onde

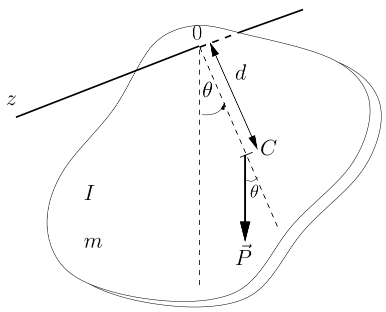
$$\theta_0\cos\phi = c_1 + c_2 \qquad \text{e} \qquad -\theta_0\operatorname{sen}\phi = i(c_1 - c_2)$$

Temos finalmente que

$$\theta(t) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{l}{g}}t + \phi\right)$$

Pêndulo Físico

Denominamos pêndulo físico qualquer corpo rígido que pode oscilar livremente em torno de um eixo horizontal sob a ação da gravidade.



$$\begin{array}{rcl} C & \rightarrow & \text{centro de massa} \\ I & \rightarrow & \text{momento de inércia} \\ m & \rightarrow & \text{massa do corpo} \\ d & \rightarrow & \overline{OC} \end{array}$$

Obs.: Todos pêndulo reais são pêndulos físicos.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d \operatorname{sen} \theta & -d \cos \theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = -dmg \operatorname{sen} \theta \vec{k}$$

A componente z do torque que age sobre o corpo é

$$\tau_z = -mgd \operatorname{sen} \theta.$$

Por outro lado,

$$\tau_z = I\alpha,$$

onde

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

é a aceleração angular. Daí

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd \operatorname{sen} \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Supondo que as oscilações são pequenas ($\theta << 1$),

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0.$$

Neste caso,

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I} \qquad \text{e} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}.$$

Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0.$$

Equação característica:

$$
\begin{aligned}
&r^2 + \frac{mgd}{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} i = \omega i, \qquad r_2 = -\sqrt{\frac{mgd}{I}} i = -\omega i \\
&\theta(t) = c_1 e^{\omega i t} + c_2 e^{-\omega i t} = c_1(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + c_2(\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) \\
&\qquad = (c_1 + c_2) \cos \omega t + i(c_1 - c_2) \operatorname{sen} \omega t \\
&\qquad = \theta_0 \cos \omega t \cos \phi - \theta_0 \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \phi = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{mgd}{I}} t + \phi \right)
\end{aligned}
$$

Movimento Harmônico Amortecido

Quando estudamos o oscilador harmônico, supomos as forças conservativas. Na prática, sempre existe dissipação de energia.

Vamos supor que, além da força restauradora

$$F = -kx,$$

age uma outra força de sentido oposto ao da velocidade

$$F' = -\lambda v,$$

onde λ é uma constante. Pela segunda lei de Newton,

$$
\begin{gathered}
ma = -kx - \lambda v \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda \frac{dx}{dt} \\
\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.
\end{gathered}
$$

Podemos reescrever esta equação como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

onde

$$2\gamma = \frac{\lambda}{m} \qquad \text{e} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

é a freqüência angular natural, sem amortecimento.

Equação característica:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \qquad r_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Consideremos o caso em que o amortecimento é pequeno, isto é $\gamma < \omega_0$. Assim,

$$r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma + \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = -\gamma + \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}i$$

$$r_2 = -\gamma - \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}i$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \Rightarrow \quad r_1 = -\gamma + wi, \qquad r_2 = -\gamma - wi$$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 e^{(-\gamma + i\omega)t} + c_2 e^{(-\gamma - i\omega)t} \\ &= e^{-\gamma t}\left[c_1(\cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t) + c_2(\cos\omega t - i\operatorname{sen}\omega t)\right] \\ &= e^{-\gamma t}\left[(c_1 + c_2)\cos\omega t + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen}\omega t\right] \\ &= e^{-\gamma t}\left[A\cos\omega t\cos\phi - A\operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\phi\right] \end{aligned}$$

onde

$$c_1 + c_2 = A\cos\phi \qquad \text{e} \qquad i(c_1 - c_2) = -A\operatorname{sen}\phi$$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)$$

Obs.:

1. Se o amortecimento é muito grande, γ pode se tornar maior do que ω_0. Neste caso, não há oscilações.

   $$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

   onde

   $$r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \in \mathbb{R}$$

   $$r_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \in \mathbb{R}$$

2. A energia perdida pela partícula que executa oscilações amortecidas é absorvida pelo meio ambiente.

3. A freqüência é menor e o período é maior quando existe atrito.

9. Quando um corpo se move através de um fluido viscoso sob a ação de uma força $\vec{F}$, a força resultante é $F - K\eta v$, onde K depende da forma do corpo, v é a velocidade do corpo e η é o coeficiente de viscosidade. Obter a velocidade como função do tempo. Suponha que o movimento seja retilíneo, que a força aplicada seja constante e que $v(0) = v_0$.

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad F - K\eta v = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{K\eta}{m}\left(v - \frac{F}{K\eta}\right) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{v - \dfrac{F}{K\eta}} dv = -\frac{K\eta}{m}\int dt$$

$$\ln\left(v - \frac{F}{K\eta}\right) = -\frac{K\eta}{m}t + c_1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{F}{K\eta} + ce^{-\frac{K\eta}{m}t}$$

$$v(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{K\eta} + c = v_0 \quad \Rightarrow \quad c = v_0 - \frac{F}{K\eta}$$

$$v(t) = \frac{F}{K\eta} + \left(v_0 - \frac{F}{K\eta}\right)e^{-\frac{K\eta}{m}t}$$

Oscilações Forçadas

Consideremos uma força externa periódica agindo sobre um oscilador (amortecido). Podemos supor que, em geral, o período desta força não coincidirá com o período natural do oscilador. A força externa tem o papel de suprir continuamente o oscilador com energia, compensando a dissipação.

Considere

$$F = F_0 \cos \omega_f t,$$

a força aplicada e ω_f sua freqüência. Vamos supor que a partícula esteja sujeita também a uma força

$$F = -kx$$

e a uma força amortecedora

$$F' = -\lambda v.$$

A equação do movimento é

$$-kx - \lambda v + F_0 \cos \omega_f t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega_f t \tag{7.1}$$

onde

$$2\gamma = \frac{\lambda}{m} \qquad \text{e} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

A solução de (7.1) tem a forma

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{7.2}$$

Cálculo de $x_h(t)$

Equação homogênea: $\displaystyle\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$

Do Exercício 8,

$$x_h(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi) \tag{7.3}$$

Cálculo de $x_p(t)$

Temos que

$$x_p(t) = B\cos\omega_f t + C\,\mathrm{sen}\,\omega_f t \tag{7.4}$$

$$x_p'(t) = -B\omega_f\,\mathrm{sen}\,\omega_f t + C\omega_f\cos\omega_f t \tag{7.5}$$

$$x_p''(t) = -B\omega_f^2\cos\omega_f t - C\omega_f^2\,\mathrm{sen}\,\omega_f t \tag{7.6}$$

Levando (7.4), (7.5) e (7.6) em (7.1),

$$-B\omega_f^2\cos\omega_f t - C\omega_f^2\,\mathrm{sen}\,\omega_f t + 2\gamma\left[-B\omega_f\,\mathrm{sen}\,\omega_f t + C\omega_f\cos\omega_f t\right]$$
$$+\,\omega_0^2\left[B\cos\omega_f t + C\,\mathrm{sen}\,\omega_f t\right] = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t$$

$$\begin{cases} -B\omega_f^2 + 2C\gamma\omega_f + \omega_0^2 B = \dfrac{F_0}{m} \\ -C\omega_f^2 + 2B\gamma\omega_f + \omega_0^2 C = 0 \end{cases}$$

$$C(\omega_0^2 - \omega_f^2) = 2B\gamma\omega_f \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}B$$

$$-B\omega_f^2 + 2\gamma\omega_f\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}B + \omega_0^2 B = \frac{F_0}{m}$$

$$B\left[\frac{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right] = \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2}$$

$$C = \frac{F_0}{m}\frac{2\gamma\omega_f}{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2}$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\
&= Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2}\cos\omega_f t \\
&\qquad + \frac{F_0}{m}\frac{2\omega_f\gamma}{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2}\operatorname{sen}\omega_f t
\end{aligned}
$$

O primeiro termo do segundo membro, solução da equação homogênea, representa oscilações amortecidas. Este termo decresce quanto t cresce e, ao fim de certo tempo, os outros dois termos, que representam oscilações forçadas, são os que desempenham papel principal.

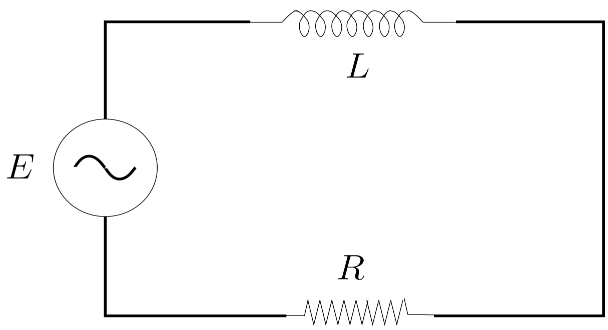
Fazendo

$$
A^*\cos\phi^* = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2} \quad \text{e} \quad A^*\operatorname{sen}\phi^* = -\frac{F_0}{m}\frac{2\omega_f\gamma}{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) + A^*\cos\phi^*\cos\omega_f t - A^*\operatorname{sen}\phi^*\operatorname{sen}\omega_f t \\
&= Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) + A^*\cos(\omega_f t + \phi^*)
\end{aligned}
$$

Circuito RL



O comportamento dos elementos que constituem este circuito é regido por uma equação linear de primeira ordem que resulta da aplicação das seguintes leis:

1. Lei de Kirchoff

   A soma das quedas de potencial elétrico ao longo de uma malha do circuito é igual a zero.

2. Lei de Ohm

   A queda de tensão elétrica num condutor percorrido por uma corrente de intensidade I é proporcional a esta corrente. A lei se exprime pela equação

$$E = RI.$$

   A constante de proporcionalidade é a resistência do condutor.

3. A queda de tensão através de um indutor é proporcional à taxa de variação da corrente.

$$E = L\frac{dI}{dt},$$

   onde L é a indutância do indutor.

Temos então que

$$E(t) - RI - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Determine a corrente como função do tempo para:

1. $E = K$ (constante)

$$\begin{gathered}
L\frac{dI}{dt} + RI = K \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \frac{K}{L} - \frac{RI}{L} \\
\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}(K - RI) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{K - RI}dI = \frac{1}{L}dt \\
\int \frac{1}{K - RI}dI = \frac{1}{L}\int dt \\
-\frac{1}{R}\ln(K - RI) = \frac{1}{L}t + c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln(K - RI) = -\frac{R}{L}t + c_2, \qquad c_2 = -Rc_1 \\
K - RI = \exp\left\{-\frac{R}{L}t + c_2\right\} \quad \Rightarrow \quad RI = K - c\exp\left\{-\frac{R}{L}t\right\}, \qquad c = e^{c_2} \\
I(t) = \frac{K}{R} + c\exp\left\{-\frac{R}{L}t\right\}.
\end{gathered}$$

   Obs.: $\lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{K}{R}.$

2. $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E_0 \operatorname{sen} \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E_0}{L} \operatorname{sen} \omega t$$
$$I = uv \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}$$
$$u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} + \frac{R}{L}uv = \frac{E_0}{L} \operatorname{sen} \omega t$$
$$u\left(\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L}v\right) + v\frac{du}{dt} = \frac{E_0}{L} \operatorname{sen} \omega t$$

Cálculo de v

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L}v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v}dv = -\frac{R}{L}dt$$
$$\int \frac{1}{v}dv = -\frac{R}{L}\int dt \quad \Rightarrow \quad v = \exp\left\{-\frac{R}{L}t + c_1\right\}$$
$$v(t) = c_2 e^{-\frac{R}{L}t}, \qquad c_2 = e^{c_1}$$

Cálculo de u

$$v\frac{du}{dt} = \frac{E_0}{L} \operatorname{sen} \omega t \quad \Rightarrow \quad c_2 e^{-\frac{R}{L}t}\frac{du}{dt} = \frac{E_0}{L} \operatorname{sen} \omega t$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{c_2}\frac{E_0}{L}e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen} \omega t \quad \Rightarrow \quad \int du = \frac{1}{c_2}\frac{E_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen} \omega t dt$$

Cálculo de $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx$

$$\int w dz = wz - \int z dw; \qquad \begin{array}{l} z = e^{ax}, \quad dz = ae^{ax}dx \\ w = -\frac{1}{b}\cos bx, \quad dw = \operatorname{sen} bx dx \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx &= -\frac{1}{b}\cos bx e^{ax} + \int \frac{1}{b}\cos bx a e^{ax} dx \\ &= -\frac{1}{b}\cos bx e^{ax} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx \end{aligned}$$

Cálculo de $\int e^{ax} \cos bx dx$

$$\int w' dz' = w'z' - \int z' dw'; \qquad \begin{array}{l} z' = e^{ax}, \quad dz' = ae^{ax}dx \\ w' = \frac{1}{b}\operatorname{sen} bx, \quad dw' = \cos bx dx \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos bx dx &= \frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \int \frac{1}{b}\operatorname{sen} bx a e^{ax} dx \\
&= \frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx &= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left\{\frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx\right\} \\
&= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx &= \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{b^2} \\
\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx &= \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} \\
a \equiv \frac{R}{L}, &\qquad b \equiv \omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int e^{\frac{R}{L}t}\operatorname{sen}\omega t dt &= \frac{e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{R}{L}\operatorname{sen}\omega t - \omega\cos\omega t\right)}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2} + c_3 \\
&= \frac{Le^{\frac{R}{L}t}\left(R\operatorname{sen}\omega t - \omega L\cos\omega t\right)}{R^2+\omega^2L^2} + c_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{c_2}\frac{E_0}{L}\frac{Le^{\frac{R}{L}t}\left(R\operatorname{sen}\omega t - \omega L\cos\omega t\right)}{R^2+\omega^2L^2} + c_4 \\
&= \frac{E_0e^{\frac{R}{L}t}}{c_2(R^2+\omega^2L^2)}\left(R\operatorname{sen}\omega t - \omega L\cos\omega t\right) + c_4
\end{aligned}
$$

Observação:

$$
A\operatorname{sen} x - B\cos x = C\operatorname{sen} x\cos\delta - C\cos x\operatorname{sen}\delta = C\operatorname{sen}(x-\delta)
$$

onde

$$
A = C\cos\delta \qquad \text{e} \qquad B = C\operatorname{sen}\delta
$$

Mas,

$$
\cos\delta = \frac{A}{C} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\delta = \frac{B}{C}
$$

Daí,

$$\cos^2\delta + \operatorname{sen}^2\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$$
$$A \operatorname{sen} x + B\cos x = \sqrt{A^2 + B^2}\operatorname{sen}(x - \delta)$$

com

$$\frac{\operatorname{sen}\delta}{\cos\delta} = \frac{\frac{B}{C}}{\frac{A}{C}} = \frac{B}{A} = \operatorname{tg}\delta \quad \Rightarrow \quad \delta = \operatorname{arctg}\frac{B}{A}$$

Temos então que

$$u(t) = \frac{E_0 e^{\frac{R}{L}t}}{c_2(R^2 + \omega^2 L^2)}\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\operatorname{sen}(\omega t - \delta) + c_4$$

onde

$$\delta = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$$
$$u(t) = \frac{E_0 e^{\frac{R}{L}t}}{c_2\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\operatorname{sen}(\omega t - \delta) + c_4$$

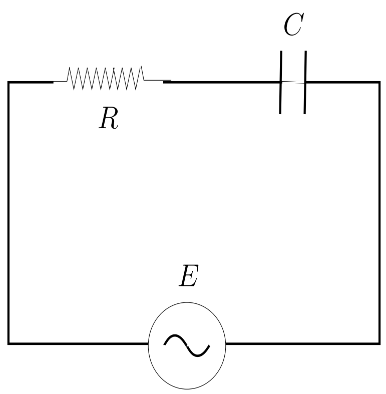
Portanto,

$$I(t) = u(t)v(t) = c_2 e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{E_0 e^{\frac{R}{L}t}}{c_2\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\operatorname{sen}(\omega t - \delta) + c_4\right\}$$
$$I(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\operatorname{sen}(\omega t - \delta)$$

Note que o termo exponencial se aproxima de zero à medida que t tende para o infinito. Isto significa que, após um tempo suficientemente longo, a corrente $I(t)$ oscila de maneira praticamente harmônica.

Obs.: Se $L = 0$, as oscilações de $I(t)$ se encontram em fase com as de $E(t)$.

Circuito RC



O comportamento dos elementos que constituem este circuito é regido por uma equação diferencial que resulta da aplicação das seguintes leis:

1. Lei de Kirchoff

   A tensão aplicada em um circuito fechado é igual à soma das quedas de tensão no resto do circuito.

2. Lei de Ohm

   A queda de tensão E através de um resistor é proporcional à corrente instantânea I,
   $$E = RI,$$
   onde R é a resistência do resistor.

3. A queda de tensão através de um capacitor é proporcional ao valor da carga elétrica instantânea armazenada no condutor,
   $$E = \frac{Q}{C},$$
   onde C é a capacitância.

Como $\quad I(t) = \dfrac{dQ}{dt}$,

$$dQ = I(t)dt \quad \Rightarrow \quad Q = \int I(t)dt$$

e

$$E(t) = \frac{1}{C}\int I(t)dt.$$

Logo,

$$RI + \frac{1}{C}\int I(t)dt = E(t)$$

Derivando em relação ao tempo,

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}$$

Obtenha uma expressão para I em função do tempo, a partir da última equação.

Temos então que

$$\begin{aligned}
I = uv \quad &\Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} \\
u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} &+ \frac{1}{CR}uv = \frac{1}{R}\frac{dE}{dt} \\
v\left(\frac{du}{dt} + \frac{u}{CR}\right) &+ u\frac{dv}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dE}{dt}
\end{aligned}$$

Cálculo de u

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} + \frac{u}{CR} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{u}du = -\frac{1}{CR}dt \\
\int \frac{1}{u}du = -\frac{1}{CR}\int dt \quad &\Rightarrow \quad \ln u = -\frac{1}{CR}t + c_1 \\
u = c_2 \exp\left\{-\frac{1}{CR}t\right\}, &\qquad c_2 = e^{c_1}
\end{aligned}$$

Cálculo de v

$$\begin{aligned}
c_2 e^{-\frac{t}{CR}}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dE}{dt} \quad &\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{c_2 R}\frac{dE}{dt}e^{\frac{t}{CR}} \\
v = \frac{1}{c_2 R}&\int e^{\frac{t}{CR}}\frac{dE}{dt}dt + c_3 \\
I &= uv \\
I(t) = c_2 e^{-\frac{t}{RC}}&\left\{\frac{1}{c_2 R}\int e^{\frac{t}{CR}}\frac{dE}{dt}dt + c_3\right\} \\
= e^{-\frac{t}{RC}}&\left\{\frac{1}{R}\int e^{\frac{t}{CR}}\frac{dE}{dt}dt + k\right\}, \qquad k = c_2 c_3
\end{aligned}$$

10. Na última equação, obtenha $I(t)$ para:

1. $E = A$ (constante)

$$I(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \left\{ \frac{1}{R} \int e^{\frac{t}{CR}} \frac{dE}{dt} dt + k \right\},$$

$$E = A \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

$$I(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \{k_1 + k\} = k_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

2. $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$

$$\frac{dE}{dt} = \omega E_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \left\{ \frac{1}{R} \int e^{\frac{t}{CR}} \omega E_0 \cos \omega t dt + k \right\}$$

$$= e^{-\frac{t}{RC}} \left\{ \frac{\omega E_0}{R} \int e^{\frac{t}{CR}} \cos \omega t dt + k \right\}$$

Cálculo de $\int e^{ax} \cos bx dx$

$$\int u dv = uv - \int v du; \qquad \begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad du = a e^{ax} dx \\ v = \frac{1}{b} \operatorname{sen} bx, \quad dv = \cos bx dx \end{array}$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \int \frac{1}{b} \operatorname{sen} bx a e^{ax} dx$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx$$

Cálculo de $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx$

$$\int u' dv' = u'v' - \int v' du'; \qquad \begin{array}{l} u' = e^{ax}, \quad du' = a e^{ax} dx \\ v' = -\frac{1}{b} \cos bx, \quad dv' = \operatorname{sen} bx dx \end{array}$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \int \frac{1}{b} \cos bx a e^{ax} dx$$

$$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

Logo,

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\left\{-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx\right\}$$
$$= \frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx$$
$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(b\operatorname{sen} bx + a\cos bx)}{b^2}$$
$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx)}{a^2+b^2}$$
$$a \equiv -\frac{1}{RC}, \qquad b \equiv \omega$$

$$I(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\left\{\frac{\omega E_0}{R}\frac{e^{\frac{t}{RC}}\left(\frac{1}{RC}\cos\omega t + \omega\operatorname{sen}\omega t\right)}{\frac{1}{R^2C^2}+\omega^2} + k\right\}$$
$$= \frac{\omega E_0}{R(1+R^2C^2\omega^2)}\frac{R^2C^2}{RC}\left(\cos\omega t + \omega RC\operatorname{sen}\omega t\right) + ke^{-\frac{t}{RC}}$$

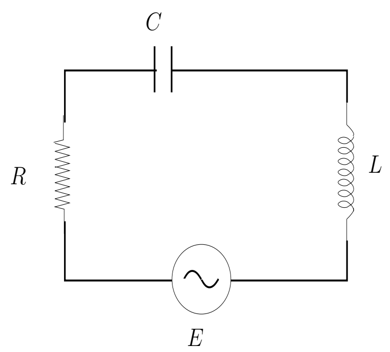
Mas,

$$\cos\omega t + \omega RC\operatorname{sen}\omega t = -c'\operatorname{sen}\delta\cos\omega t + c'\cos\delta\operatorname{sen}\omega t$$

onde

$$-c'\operatorname{sen}\delta = 1 \qquad \text{e} \qquad c'\cos\delta = \omega RC$$
$$\cos\omega t + \omega RC\operatorname{sen}\omega t = c'(\cos\delta\operatorname{sen}\omega t - \operatorname{sen}\delta\cos\omega t) = c'\operatorname{sen}(\omega t - \delta)$$
$$(-c'\operatorname{sen}\delta)^2 + (c'\cos\delta)^2 = 1 + (\omega RC)^2 \quad\Rightarrow\quad c'^2(\operatorname{sen}^2\delta + \cos^2\delta) = 1 + (\omega RC)^2$$
$$\Rightarrow \quad c' = \sqrt{1+(\omega RC)^2}$$
$$\cos\omega t + \omega RC\operatorname{sen}\omega t = \sqrt{1+(\omega RC)^2}\operatorname{sen}(\omega t - \delta)$$
$$I(t) = \frac{\omega E_0 C}{1+R^2C^2\omega^2}\sqrt{1+(\omega RC)^2}\operatorname{sen}(\omega t - \delta) + ke^{-\frac{t}{RC}}$$
$$= \frac{\omega E_0 C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\operatorname{sen}(\omega t - \delta) + ke^{-\frac{t}{RC}}$$
$$\begin{cases} -c'\operatorname{sen}\delta = 1 \\ c'\cos\delta = \omega RC \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \frac{-c'\operatorname{sen}\delta}{c'\cos\delta} = \frac{1}{\omega RC}$$
$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{1}{\omega RC} \qquad \text{ou} \qquad \delta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Circuito RLC



A equação diferencial de segunda ordem que descreve o comportamento da corrente elétrica em função do tempo nesse circuito resulta da aplicação das seguintes leis:

1. Lei de Kirchoff

   A tensão aplicada em um circuito fechado é igual à soma das quedas de tensão no resto do circuito.

2. Lei de Ohm

   A diferença de potencial aplicada aos terminais de um resistor metálico mantido à temperatura constante, é diretamente proporcional à intensidade de corrente elétrica que o atravessa. Escrevemos

$$E = RI.$$

3. A queda de tensão através de um indutor é proporcional à taxa de variação da corrente. Isto é,

$$E = L\frac{dI}{dt}.$$

4. A queda de tensão através de um capacitor é proporcional ao valor da carga elétrica armazenada no condutor. Temos então que

$$E = \frac{Q}{C}.$$

Portanto

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t).$$

Derivando em relação ao tempo, obtemos

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}.$$

Considerando $E = E_0 \operatorname{sen} \omega_l t$,

$$\frac{dE}{dt} = \omega_l E_0 \cos \omega_l t$$

e ficamos com

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \omega_l E_0 \cos \omega_l t$$
$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{\omega_l E_0}{L} \cos \omega_l t$$

ou

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2b\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = F \cos \omega_l t$$

onde

$$\frac{R}{L} = 2b, \qquad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\omega_l E_0}{L} = F.$$

Resolva a equação diferencial acima.

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2b\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = F \cos \omega_l t \quad \Rightarrow \quad I(t) = I_h(t) + I_p(t)$$

Solução da equação homogênea

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2b\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0$$

Equação Característica: $r^2 + 2br + \omega_0^2 = 0$

$$r = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

Consideremos o caso em que $b^2 < \omega_0^2$. Neste caso,

$$I_h(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 \exp[(-b + i\omega)t] + c_2 \exp[(-b - i\omega)t]$$

onde $\quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$

$$\begin{aligned}
I_h(t) &= e^{-bt}\left[c_1(\cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t) + c_2(\cos\omega t - i\operatorname{sen}\omega t)\right] \\
&= e^{-bt}\left[(c_1+c_2)\cos\omega t + (c_1 - c_2)\operatorname{sen}\omega t\right] \\
&= e^{-bt}\left[A\cos\phi\cos\omega t - A\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\omega t\right] \\
I_h(t) &= e^{-bt}A\cos(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

onde

$$c_1 + c_2 = A\cos\phi \qquad \text{e} \qquad c_1 - c_2 = -A\operatorname{sen}\phi$$

Solução particular

$$I_p(t) = P\cos\omega_l t + Q\operatorname{sen}\omega_l t \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dI}{dt} = -P\omega_l \operatorname{sen}\omega_l t + Q\omega_l\cos\omega_l t \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2I}{dt^2} = -P\omega_l^2\cos\omega_l t - Q\omega_l^2\operatorname{sen}\omega_l t$$

Levando na equação

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2b\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = F\cos\omega_l t,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
-P\omega_l^2\cos\omega_l t - Q\omega_l^2\operatorname{sen}\omega_l t + 2b\left[-P\omega_l\operatorname{sen}\omega_l t + Q\omega_l\cos\omega_l t\right]& \\
+\,\omega_0^2\left[P\cos\omega_l t + Q\operatorname{sen}\omega_l t\right] = F\cos\omega_l t&
\end{aligned}$$

$$\left[-P\omega_l^2 + 2bQ\omega_l + \omega_0^2 P\right]\cos\omega_l t + \left[-Q\omega_l^2 - 2bP\omega_l + \omega_0^2 Q\right]\operatorname{sen}\omega_l t = F\cos\omega_l t$$

$$\begin{cases} -P\omega_l^2 + 2Qb\omega_l + \omega_0^2 P = F \\ -Q\omega_l^2 - 2Pb\omega_l + \omega_0^2 Q = 0 \end{cases}$$

$$2Pb\omega_l = Q(\omega_0^2 - \omega_l^2) \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{2b\omega_l}{\omega_0^2 - \omega_l^2}P$$

$$-P\omega_l^2 + 2b\omega_l\frac{2b\omega_l}{\omega_0^2-\omega_l^2}P + \omega_0^2 P = F \quad \Rightarrow \quad P\left[\frac{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2-\omega_l^2)^2}{\omega_0^2 - \omega_l^2}\right] = F$$

$$P = \frac{\omega_0^2 - \omega_l^2}{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2-\omega_l^2)^2}F \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{2b\omega_l}{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2-\omega_l^2)^2}F$$

$$I(t) = Ae^{-bt}\cos(\omega t + \phi) + F\frac{\omega_0^2 - \omega_l^2}{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2 - \omega_l^2)^2}\cos\omega_l t$$
$$+ F\frac{2b\omega_l}{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2 - \omega_l^2)^2}\,\mathrm{sen}\,\omega_l t$$

Observe que primeiro termo do segundo membro da última equação representa oscilações amortecidas. Quando t cresce, este termo decresce, de modo que ao final de um certo intervalo de tempo, os outros dois termos desempenharão o papel principal.

Fazendo

$$G\cos\delta = F\frac{\omega_0^2 - \omega_l^2}{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2 - \omega_l^2)^2} \qquad \text{e} \qquad G\,\mathrm{sen}\,\delta = F\frac{2b\omega_l}{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2 - \omega_l^2)^2},$$

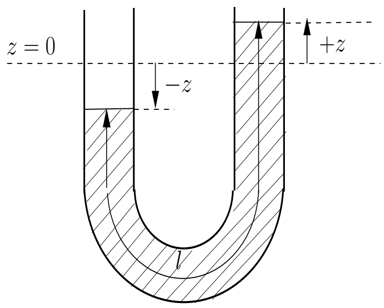
obtemos

$$I(t) = Ae^{-bt}\cos(\omega t + \phi) + G\cos(\omega_l t + \delta)$$

onde

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{2b\omega_l}{\omega_0^2 - \omega_l^2}.$$

11. Um tubo em U está cheio com um líquido homogêneo, que é levemente comprimido em um dos lados do pistão. O pistão é removido e o nível do líquido em cada ramo oscila. Determine a altura do nível do líquido em um dos ramos em função do tempo.



Consideramos o fluido ideal.

Características do fluido ideal:

1. Escoamento uniforme $\rightarrow$ a velocidade do fluido em qualquer ponto não muda com o tempo, em magnitude, em direção e em sentido.

2. Escoamento incompressível $\quad \rightarrow \quad$ a densidade do fluido é constante.
3. Escoamento não-viscoso $\quad \rightarrow \quad$ um objeto se movendo através do fluido não experimenta nenhuma força resistiva devido à viscosidade.
4. Escoamento irrotacional $\quad \rightarrow \quad$ um corpo imerso no fluido não gira em torno do eixo que passa pelo seu centro de massa.

Quando o nível em um dos ramos do tubo em U desce de uma quantidade z, a diferença de pressão do líquido entre os dois ramos é

$$\Delta p = 2\rho g z,$$

onde ρ é a densidade do líquido e g é a aceleração da gravidade. Dessa forma, a força restauradora pode ser escrita como

$$F = -A\Delta p = 2\rho A g z,$$

onde A é a área da seção transversal do tubo. Temos então que

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = -2\rho A g z \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2\rho A g}{m} z = 0.$$

Mas,

$$\frac{2\rho A g}{m} = \frac{2\rho A g}{\rho V} = \frac{2\rho A g}{\rho A l} = \frac{2g}{l}$$

Daí,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2g}{l} z = 0,$$

onde l é o comprimento total da coluna líquida e $m = \rho V$ é a massa total de líquido.

Equação Característica: $r^2 + \dfrac{2g}{l} = 0$

$$r_1 = \sqrt{\frac{2g}{l}} i, \qquad r_2 = -\sqrt{\frac{2g}{l}} i$$

$$z(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

onde $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}$

$$\begin{aligned} z(t) &= c_1(\cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t) + c_2(\cos\omega t - i \operatorname{sen}\omega t) \\ &= (c_1 + c_2)\cos\omega t + (c_1 - c_2)\operatorname{sen}\omega t \\ &= A\cos\phi\cos\omega t - A\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\omega t = A\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

onde

$$c_1 + c_2 = A\cos\phi \qquad \text{e} \qquad c_1 - c_2 = -A\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$z(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t + \phi\right)$$