

## PREFÁCIO

As equações diferenciais ordinárias apareceram de forma natural com os métodos do Cálculo Diferencial e Integral, descobertos por Newton e Leibnitz no final do século XVII, e se converteram na linguagem pela qual muitas das leis, em diferentes ramos da Ciência, se expressam. Assim, as equações diferenciais ordinárias modelam fenômenos que ocorrem na Física, Biologia, Economia e na própria Matemática.

Historicamente, no fim do século XVIII, as equações diferenciais ordinárias se transformaram numa disciplina independente na Matemática, impulsionada por matemáticos famosos como Euler, Lagrange e Laplace, entre outros, que estudaram as equações diferenciais ordinárias no Cálculo das Variações, na Mecânica Celeste, na Dinâmica dos Fluidos, etc. No século XIX os fundamentos da Matemática experimentaram uma revisão geral, fixando com exatidão conceitos até então nebulosos. Matemáticos como Cauchy, Gauss, Riemann e principalmente Poincaré são referências obrigatórias no estudo moderno das equações diferenciais ordinárias. Na atualidade, a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias é objeto de efervescente pesquisa em todo o mundo, incluindo o Brasil.

Nestas notas abordaremos toda a ementa das disciplinas Cálculo Diferencial e Integral III e EDO oferecidas pelo Departamento de Análise do IME–UERJ.

A autora gostaria agradecer ao professor do Departamento de Análise do IME–UERJ, Mauricio A. Vilches, pelo estímulo para que estas notas fossem organizadas na forma do presente livro bem como por sua valiosa contribuição na elaboração das figuras e gráficos que aparecem ao longo do texto.

Patrícia Nunes da Silva  
Universidade de Rio de Janeiro  
Rio de Janeiro/2005

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Definições . . . . .	1
1.2	Problemas de Valor Inicial (PVI) . . . . .	7
1.3	Campos de Direções . . . . .	9
1.4	Teorema de Picard . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Modelos</b>	<b>12</b>
2.1	Molas . . . . .	12
2.2	Lei de Resfriamento de Newton . . . . .	13
2.3	Crescimento e Decrescimento Exponencial . . . . .	13
2.3.1	Crescimento Exponencial . . . . .	13
2.3.2	Decrescimento Exponencial . . . . .	14
2.4	Crescimento Logístico . . . . .	15
2.5	Problemas de Mistura . . . . .	16
2.6	Epidemias . . . . .	17
2.7	Lei de Torricelli . . . . .	18
2.8	Circuitos . . . . .	18
2.9	Reações Químicas . . . . .	20
2.9.1	Reações Irreversíveis Mononucleares . . . . .	20
2.9.2	Reação Bimolecular Irreversível . . . . .	21
2.10	Exercícios . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Edo's de Primeira Ordem</b>	<b>23</b>
3.1	Introdução . . . . .	23
3.2	Edo's de Variáveis Separáveis . . . . .	24
3.2.1	Obtenção de Soluções não Constantes . . . . .	24
3.3	Edo's de Primeira Ordem Linear . . . . .	27
3.3.1	Obtenção de Soluções . . . . .	28
3.4	Equação de Bernoulli . . . . .	29
3.4.1	Obtenção de Soluções . . . . .	30
3.4.2	Outro método de resolução de EDOs do tipo Bernoulli . . . . .	31

3.5	Equação de Riccati . . . . .	42
3.5.1	Determinação de Soluções . . . . .	43
3.5.2	Método Alternativo de Resolução da edo de Riccati . . . . .	44
3.6	Edo's Exatas . . . . .	46
3.6.1	Fator Integrante . . . . .	49
3.6.2	Determinação do Fator Integrante . . . . .	51
3.7	Edo's Homogêneas . . . . .	52
3.8	Edo's Redutíveis . . . . .	55
3.8.1	Redutíveis a Homogêneas . . . . .	56
3.8.2	Redutíveis a Variáveis Seraravéis . . . . .	58
3.9	Equação de Clairaut . . . . .	59
3.9.1	Determinação de Solução . . . . .	60
3.10	Equação de Lagrange . . . . .	61
3.10.1	Determinação de Solução . . . . .	62
3.11	Exercícios . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Aplicações</b>	<b>70</b>
4.1	Molas . . . . .	70
4.2	Crescimento Exponencial . . . . .	71
4.2.1	Decaimento Radioativo: . . . . .	71
4.3	Crescimento Logístico . . . . .	72
4.4	Circuitos . . . . .	73
4.5	Reações Químicas . . . . .	74
4.5.1	Reações Irreversíveis Mononucleares . . . . .	74
4.5.2	Reação Bimolecular Irreversível . . . . .	75
4.6	Famílias de Curvas Planas . . . . .	75
4.6.1	Envoltórias . . . . .	77
4.6.2	Trajatórias . . . . .	78
4.6.3	Trajatórias Ortogonais . . . . .	79
4.7	Exercícios . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Edo's de Segunda Ordem</b>	<b>86</b>
5.1	Edo's de Segunda Ordem Redutíveis . . . . .	86
5.2	Aplicações . . . . .	90
5.2.1	Curva de Perseguição . . . . .	90
5.2.2	Catenária . . . . .	92
5.3	Equações Lineares de Segunda Ordem . . . . .	95
5.3.1	Álgebra Linear I . . . . .	96
5.3.2	Redução de Ordem . . . . .	101
5.3.3	Álgebra Linear II . . . . .	103
5.4	Edo's com Coeficientes Constantes . . . . .	105

5.4.1	Álgebra Linera III . . . . .	107
5.5	Equação de Euler-Cauchy Homogênea . . . . .	110
5.6	Edos não Homogêneas . . . . .	113
5.6.1	Método de Variação de Parâmetros . . . . .	113
5.7	Método dos Coeficientes Indeterminados . . . . .	118
5.7.1	Determinação dos Coeficientes . . . . .	122
5.8	Exercícios . . . . .	126
5.9	Aplicações . . . . .	129
5.9.1	Sistema massa-mola . . . . .	129
5.9.2	Oscilações livres não-amortecidas . . . . .	129
5.9.3	Oscilações livres amortecidas . . . . .	130
5.9.4	Oscilações Forçadas não-amortecidas . . . . .	132
5.9.5	Oscilações Forçadas amortecidas . . . . .	134
<b>6</b>	<b>Edo's de Ordem Superior</b>	<b>138</b>
6.1	Edo's Lineares de Ordem $n$ . . . . .	139
6.1.1	Equações Lineares Homogêneas . . . . .	140
6.1.2	Redução de Ordem . . . . .	143
6.1.3	Edo's Homogêneas com Coeficientes Constantes . . . . .	145
6.1.4	Estudo Detalhado das Raízes . . . . .	147
6.2	Equação de Euler-Cauchy Homogêneas . . . . .	155
6.3	Método de Variação dos Parâmetros . . . . .	158
6.4	Método dos Coeficientes Indeterminados . . . . .	161
6.5	Exercícios . . . . .	166
<b>7</b>	<b>Exercícios Resolvidos</b>	<b>170</b>
7.1	Aplicações à Biologia . . . . .	170
7.2	Aplicações à Física . . . . .	177
<b>8</b>	<b>Transformada de Laplace</b>	<b>209</b>
8.1	Funções de ordem exponencial . . . . .	211
8.2	Transformada Inversa de Laplace . . . . .	214
8.3	Resolução de PVI . . . . .	220
8.4	Função Degrau Unitário . . . . .	223
8.5	Funções Periódicas . . . . .	228
8.6	Convolução . . . . .	230
8.7	Função de Impulso . . . . .	232
8.7.1	Princípio de Duhamel . . . . .	234
8.8	Exercícios . . . . .	239

<b>9</b>	<b>Sistemas de Equações Diferenciais Lineares</b>	<b>246</b>
9.1	Sistemas Lineares: coeficientes constantes . . . . .	249
9.2	Método de Eliminação . . . . .	254
9.3	Exercícios . . . . .	257
<b>10</b>	<b>Respostas</b>	<b>258</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>276</b>