

# Polinômios: interpolações e aproximações (13-9-2004)

**Carlos A. de Moura**

*demoura@ime.uerj.br*

Instituto de Matemática e Estatística, UERJ

## Resumo

Retomaremos a discussão sobre interpolação polinomial de uma dada função, iniciada na exposição de 30-8, discutindo alguns resultados de aproximação.

## 1 INTRODUÇÃO

Na aula anterior discutimos a conveniência da utilização de funções polinomiais para obter os valores que uma dada função assume em pontos de seu domínio aos quais “não temos acesso”. Os polinômios gozam da propriedade de serem as funções cujos valores podem ser calculados mais eficientemente em qualquer computador, por só envolver este cálculo adições e multiplicações<sup>1</sup>.

Observamos que a unicidade da solução do problema da interpolação polinomial se baseia no *teorema fundamental da álgebra*<sup>2</sup> e que a existência dessa solução pode ser demonstrada construtivamente, de uma forma bem simples, usando a *fórmula de interpolação de Lagrange*, por exemplo.

Recordemos o resultado sobre o *problema da interpolação polinomial*: Dados  $N + 1$  reais distintos  $x_j$  e os correspondentes  $N + 1$  valores  $y_j = f(x_j)$

---

<sup>1</sup>Observamos que não existe uma única forma de efetuar a correspondente computação, apresentando o esquema (ou algoritmo) de Horner.

<sup>2</sup>Esta terminologia tem seus críticos ...

de uma dada função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , existe um único polinômio de grau  $N$ ,  $p = p_N$  para o qual se tem

$$p(x_j) = y_j, \quad j = 1, 2, \dots, N + 1.$$

A pergunta que naturalmente **temos** de formular é:

Qual o erro cometido?

Em outras palavras, para um ponto qualquer  $x$  diferente dos  $x_j$ , qual a distância, ou o *erro*

$$e_N(x) = e(x) := [p_N(x) - f(x)]?$$

A receita para chegar à resposta **sempre** é: ataquemos o caso mais simples. De fato, já tínhamos observado que o caso  $N = 1$ , isto é, quando temos dois pontos, já era familiar. Examinando-o mais de perto, temos uma função  $f$ , conhecemos seus valores nos pontos  $a$ ,  $b$  e a estamos aproximando no intervalo  $[a, b]$  pela reta secante definida pelos valores  $f(a)$ ,  $f(b)$ .

Isto nos evoca necessariamente:

- o teorema do valor médio do cálculo diferencial (TVMCD)
- a fórmula de Taylor (FT)

Observemos que até agora nada mencionamos sobre as propriedades da função  $f$ , nem mesmo a continuidade foi necessária. Mas os resultados acima exigem pelo menos diferenciabilidade.

**Exercício** Preencha todas as hipóteses corretas na estimativa que segue.

O TVMCD nos diz que, para determinadas  $f$  definidas em  $(a, b)$ ,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad \text{para algum } \xi \in (a, b). \quad (1)$$

Sendo  $x := a + h \in (a, b)$ ,

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(\xi_h), \quad \text{para algum } \xi_h \in (a, a + h). \quad (2)$$

Sabemos que o polinômio  $p = p_1$  satisfaz (ou é dado por)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{p(a + h) - p(a)}{h}, \quad \text{para todo } x := a + h \in (a, b),$$

ou

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{p(a + h) - f(a)}{h} \Rightarrow p(a + h) = f(a) + h \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (3)$$

Como, de (2), se deduz que

$$f(a + h) = f(a) + h f'(\xi_h),$$

usando (1) na segunda identidade de (3), obtemos por subtração que

$$e(x) = e_1(a+h) := [p_1(a+h) - f(a+h)] = h [f'(\xi) - f'(\xi_h)]. \quad (4)$$

**Exercício** Esta não é a forma padrão do erro na interpolação. Pesquise o que os livros de Cálculo Numérico apresentam. Compare.

Pode ser conveniente obter, em vez de (4), uma estimativa *uniforme* no intervalo, que independa do ponto considerado. Isto já nos conduz a substituir o parâmetro  $h$  pelo comprimento do intervalo  $b - a$ . E o fator  $[f'(\xi) - f'(\xi_h)]$  pode ser majorado por

$$|f'(\xi) - f'(\xi_h)| \leq 2 \max_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)|.$$

Que leitura nos fornece esta avaliação do erro cometido na interpolação?

- Quanto maior o intervalo  $[a, b]$ , maior o erro.
- Se a função varia muito rapidamente, ou seja, se sua derivada assume valores muito elevados, o erro pode ser muito grande, isto é, os valores obtidos na interpolação podem ser pouco significativos.

Consideremos então o seguinte problema: temos o intervalo  $[a, b]$  fixo, mas temos bastante informação sobre  $f$ , ou seja, podemos calcular os interpoladores  $p_N$ , para arbitrários valores de  $N$ . Certamente poderemos gerar melhores aproximações, menores erros. Esta idéia é reforçada por dois fatos:

- A estimativa do erro para  $N + 1$  pontos vai depender da derivada de ordem  $N + 1$  e também do maior comprimento dos sub-intervalos  $[x_j, x_{j+1}]$ .
- O teorema de aproximação de Weierstrass, TAW, descrito na seção que segue.

## 2 Aproximações com polinômios

É um resultado clássico de Análise:

**Teorema de Aproximação de Weierstrass** Dada qualquer função real contínua no intervalo  $[a, b]$ , exigindo-se um grau arbitrário de aproximação uniforme, existe pelo menos um polinômio que satisfaz esta condição.

Em termos matemáticos mais precisos (ou padronizados):

Seja $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e arbitrária. Dado qualquer $\epsilon > 0$ , $\exists$ um polinômio $p_\epsilon$ tal que
---

$$|f(x) - p_\epsilon(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b].$$

Enfatizemos: um mesmo polinômio satisfaz o vínculo exigido para **todos** os pontos do intervalo.

## 3 Continuação

Discussão.

Exemplo de Runge.

Elementos Finitos.